

SUCESIONES

En esta sección veremos los siguientes contenidos:

| | Página |
|---------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| Introducción | 1 |
| 1. Las sucesiones numéricas como funciones reales de dominio natural (\mathbb{N}) | 2 |
| 2. Término general, enésimo o ley de formación | 2 |
| 3. Representación gráfica | 4 |
| 4. Sucesiones monótonas | 4 |
| 5. Sucesiones acotadas | 5 |
| 6. Límite de sucesiones. Sucesiones convergentes | 6 |
| 7. Propiedades de los límites | 8 |
| 8. Convergencia de las sucesiones monótonas acotadas | 10 |
| 9. El número "e" | 10 |
| 10. Problemas de aplicación | 12 |

INTRODUCCIÓN

Observa la siguiente historieta:



El ingeniero le dio a Pepe la siguiente tabla que él completó con los datos de temperatura:

| | Día 1 | | | | | | | | | Día 2 | | | | | | | |
|----|-------|------|------|----|------|----|------|----|------|-------|------|------|------|------|------|------|------|
| h | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 |
| t° | 56,5 | 56,4 | 56,3 | 56 | 58,6 | 59 | 59,4 | 58 | 56,5 | 56,5 | 56,4 | 56,1 | 58,4 | 59,2 | 59,5 | 58,1 | 56,2 |



Mhm! voy a hacer el trabajo bien prolijo, como le gusta al ingeniero.

Entonces Pepe ordenó las temperaturas como sigue:

| t° | 59,5 | 59,4 | 59,2 | 59 | 58,6 | 58,4 | 58,1 | 58 | 56,5 | 56,5 | 56,5 | 56,4 | 56,4 | 56,3 | 56,2 | 56,1 | 56 |
|----|------|------|------|----|------|------|------|----|------|------|------|------|------|------|------|------|----|
|----|------|------|------|----|------|------|------|----|------|------|------|------|------|------|------|------|----|

¿Te parece que en este caso le servirá al ingeniero la tabla de Pepe ordenada de mayor a menor?

¿Qué factor consideras importante?

Si se conoce la frecuencia en la toma de la temperatura, lo más importante en este caso (puede no serlo en otros), es el **orden en que fueron obtenidas**. Así podríamos considerar que la primera lectura es t_1 , la segunda t_2 y así siguiendo.

Se forma una **sucesión** de temperaturas, que escribiremos utilizando la siguiente **simbología**:

$$\{t_n\} = \{t_1, t_2, t_3, \dots, t_n\} = \{56,5 ; 56,4 ; 56,3 ; 56 ; 58,6 ; 59 ; 59,4 ; 58 ; 56,5 ; 56,5 ; 56,4 ; 56,1 ; 58,4 ; 59,2 ; 59,5 ; 58,1 ; 56,2\}$$

Esta sucesión tiene un número finito de elementos; en Análisis Matemático I estudiaremos sucesiones numéricas con infinitos elementos.

1. LAS SUCESIONES NUMÉRICAS COMO FUNCIONES REALES DE DOMINIO NATURAL (\mathbb{N})

Se aplican en problemas geométricos y biológicos, en las secciones áureas, en espectroscopia, etc.

DEFINICIÓN:

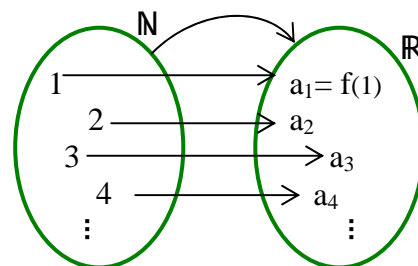
Se llama **sucesión numérica** a una función que aplica el conjunto de los números naturales en el de los reales, tal que los elementos de la imagen están relacionados con los del dominio mediante una función de n , $a_n = f(n)$.

En símbolos:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} / a_n = f(n)$$

Los elementos de la imagen se llaman **términos de la sucesión**.

Forman un **conjunto ordenado** de infinitos números reales a_n que se obtienen mediante la expresión de la función $a_n = f(n)$, siendo $n \in \mathbb{N}$ la **variable independiente**.



2. TÉRMINO GENERAL, ENÉSIMO O LEY DE FORMACIÓN

También se suele indicar a la sucesión como $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1; a_2; a_3; a_4; \dots; a_n; \dots\}$ que se lee: “sucesión a_n desde $n = 1$ hasta infinito”.

En general damos por sobreentendido la variación de n y escribimos en forma abreviada: $\{a_n\}$ en lugar de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

“ a_n ” se llama **término enésimo** (algunos autores lo llaman n -ésimo) o **término general** o **término genérico** y es el que da la ley de formación de los infinitos términos.

Ejemplo 1: Escribe los elementos de la sucesión cuyo término general es $a_n = f(n) = 2^n$.

Para $n = 1$, $a_1 = f(1) = 2^1 = 2$; para $n = 2$, $a_2 = f(2) = 2^2 = 4$, ... se puede continuar dando a n todos los valores naturales que se quiera.

$$\{2^n\} = \{2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$$

Ejemplo 2: A veces se define la sucesión por **recurrencia**, donde se dan reglas que permiten obtener cada término partiendo de los anteriores. Un ejemplo muy utilizado en biología es la sucesión de Fibonacci que surgió cuando estudiaba el crecimiento de una población de conejos.

Esta sucesión se define como:

$$a_1 = 1; a_2 = 1; a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \quad \forall n > 2$$

$$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2; \quad a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3; \quad a_5 = a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5; \dots$$

La sucesión resulta: $\{a_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$

Los dos primeros términos valen 1 y los que siguen se obtienen por la suma de los dos anteriores

Ejercicio propuesto 1: Ídem para: $a_1 = 1$; $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$

[Respuesta](#)

No siempre es sencillo encontrar la expresión del término n-ésimo, con frecuencia hay que probar varias veces.

Ejemplo 3: Encuentra la expresión del término enésimo para la sucesión:

$$\{b_n\} = \{-2/3; -1/4; 0; 1/6; 2/7; 3/8, \dots\}$$

Debemos encontrar la ley de formación de los términos, es decir, una regularidad. Analicemos numerador y denominador por separado:

- Los numeradores son: $-2; -1; 0; 1; 2; 3, \dots$, es decir que para $n = 1$ se tiene $b_1 = -2$, para $n = 2$ se tiene $b_2 = -1$ y así siguiendo, se va sumando una unidad. Es decir que si **n aumenta una unidad**, **b_n sube una unidad**, por lo tanto el numerador es de la forma **$n+?$** (coeficiente de n en el numerador: 1).

Para que dé por resultado $b_1 = -2$, debe ser el numerador igual a **$n-3$** (ya que $1-3 = -2$).

- Los denominadores son: $3, 4, ?, 6, 7, 8, \dots$, es razonable pensar que en el signo de pregunta corresponde 5 y que el numerador es 0 (es cierto pues para $n = 3$ queda: $3-3 = 0$).

Para $n = 1$ se tiene 3 y luego se va sumando una unidad. De manera análoga a la anterior, deducimos que el denominador es: **$n+2$** .

El término general entonces es $b_n = \frac{n-3}{n+2}$

Ejercicio 3: Revisa que todos los valores dados de la sucesión verifiquen esta expresión hallada.

Ejemplo 4: Ídem para $\{c_n\} = \left\{0, \frac{3}{4}, 1, \frac{15}{16}, \frac{3}{4}, \frac{35}{64}, \dots\right\}$

Observa que:

- Hay dos términos iguales en distinta posición, uno corresponde a $n = 2$ y el otro a $n = 5$, entonces podríamos pensar que las fracciones están simplificadas. Todavía no podemos decir cuáles son las fracciones equivalentes.
- Para $n = 3$ corresponde $c_3 = 1$; como no tiene la misma forma de los otros términos, también podemos pensar que proviene de una fracción que se ha simplificado.
- El primer término es cero y tratándose de fracciones, debe ser cero el numerador pero no el denominador (pues $0/k = 0$, $k \neq 0$). Por lo tanto el numerador debe provenir de algún múltiplo de $n-1$ o de n^2-1 o cualquier otra potencia de la forma n^p-1 con $p \in \mathbb{N}$.
 - Si fuera $n-1$ los numeradores serían: $0, 1, 2, 3, \dots$ no coinciden, busquemos otra.
 - Si fuera $2(n-1) = 2n-2$ los numeradores serían: $0, 2$, tampoco coinciden. Probemos con otra.
 - Para n^2-1 los numeradores resultan: $0, 3, 8, 15, 24, 35, \dots$ vemos que solamente no se cumple para el 3º y 5º términos, que posiblemente están simplificados.
 - Entonces las fracciones equivalentes de estos términos podrían ser $\frac{8}{8} = 1$ y $\frac{24}{32} = \frac{3}{4}$ (para $n=3$ queda $3^2-1 = 8$; para $n=5$: $25-1 = 24$)
- Sin considerar el 1º y aceptando por ahora que el 3º y 5º términos son $\frac{8}{8}$ y $\frac{24}{32}$, los denominadores parecen ser potencias de 2. El denominador podría ser 2^n .

Aparentemente el término n-ésimo es $c_n = \frac{n^2-1}{2^n}$, sólo queda verificar:

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
|---------------------------|---|---------------|-----------------|-----------------|-----------------------------|-----------------|-----|
| $c_n = \frac{n^2-1}{2^n}$ | 0 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{8}{8}=1$ | $\frac{15}{16}$ | $\frac{24}{32}=\frac{3}{4}$ | $\frac{35}{64}$ | ... |

Se verifican todos.

Ejercicio propuesto 2: Ídem para: $\{d_n\} = \left\{ 3, \frac{5}{4}, 1, \frac{9}{10}, \frac{11}{13}, \frac{13}{16}, \frac{15}{19}, \dots \right\}$

[Respuesta](#)

3. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE SUCESIONES

Las sucesiones se pueden graficar en diagramas de Venn, o en un eje real, o en un diagrama de ejes coordenados cartesianos. Usaremos acá este último.

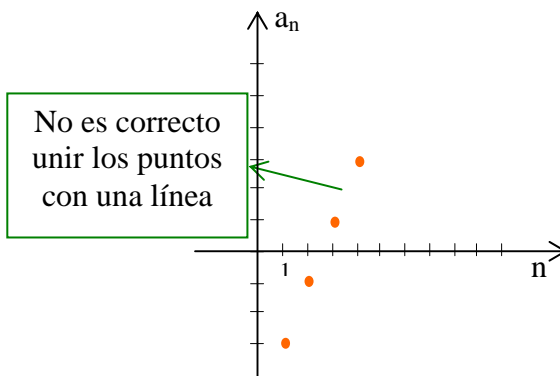
Representemos gráficamente algunas sucesiones.

Ejemplo 5: $\{a_n\} = \{2n - 5\}$

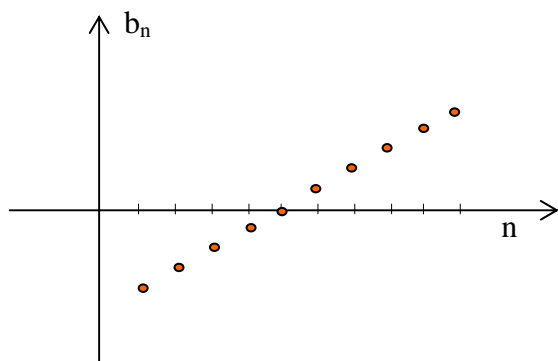
Graficamos: para $n = 1$, $a_1 = -3$; para $n = 2$, $a_2 = -1$, ...

$$\{a_n\} = \{2n - 5\} = \{-3; -1; 1; 3; 5; 7; \dots\}$$

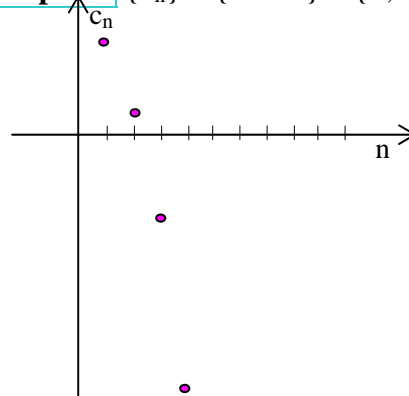
Si observas la gráfica, las imágenes se ubican sobre la recta $y = 2x - 5$, a la derecha del eje y , pero son **solamente los puntos aislados**, pues el dominio de las sucesiones es el conjunto \mathbb{N} .



Ejemplo 6: $\{b_n\} = \left\{ \frac{n}{2} - 3 \right\} = \{-5/2, -2, -3/2, -1, -1/2, 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3, 7/2, 4, \dots\}$



Ejemplo 7: $\{c_n\} = \{5 - n^2\} = \{4, 1, -4, -11, \dots\}$



Ejercicio propuesto 3: Encuentra los primeros términos y representa gráficamente.

a) $\left\{ \frac{2}{n} \right\}$, b) $\left\{ (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n} \right\}$ c) $\{-4\}$ Ayuda: $\forall n$ la imagen es -4

[Respuesta](#)

4. SUCESIONES MONÓTONAS

Los conceptos de crecimiento, monotonía y acotamiento son parecidos a los que aprendiste en las funciones de variable real x . La diferencia está en que acá la variable independiente es natural.

$$\{a_n\} \text{ es } \textbf{monótona} \Leftrightarrow \forall n: (\{a_n\} \textbf{ creciente } \vee \{a_n\} \textbf{ decreciente})$$

Sucesiones crecientes y decrecientes

$$\{a_n\} \text{ es } \textbf{creciente} \Leftrightarrow \forall n: a_n < a_{n+1}$$

$$\{a_n\} \text{ es } \textbf{decreciente} \Leftrightarrow \forall n: a_n > a_{n+1}$$

“o en sentido
excluyente”

Observa las gráficas de las sucesiones vistas:

$$\{a_n\} = \{2n - 5\} = \{-3; -1; 1; 3; 5; 7; \dots\}$$

$$\{b_n\} = \left\{ \frac{n}{2} - 3 \right\} = \{-5/2, -2, -3/2, -1, -1/2, 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3, 7/2, 4, \dots\}$$

$$\{c_n\} = \{5 - n^2\} = \{4, 1, -4, -11, \dots\}$$

En las dos primeras, a medida que n crece, los términos también lo hacen. Decimos entonces que $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones **crecientes**. En cambio $\{c_n\}$ es **decreciente**.

A veces podemos analizar el crecimiento sin realizar la gráfica, aplicando la definición como sigue:

Ejemplo 8: Analiza si $\{d_n\} = \left\{ \frac{2n-3}{n+1} \right\}$ es monótona creciente o decreciente

Debemos comparar d_n con d_{n+1} , para ver si es menor o mayor

$$\frac{2n-3}{n+1} \quad ? \quad \frac{2(n+1)-3}{n+1+1} \quad \text{El signo ? representa una desigualdad de } < \text{ o } > \text{ que todavía no conocemos.}$$

$$\Rightarrow \frac{2n-3}{n+1} \quad ? \quad \frac{2n-1}{n+2} \Rightarrow (2n-3)(n+2) \quad ? \quad (2n-1)(n+1) \Rightarrow$$

$2n^2 + n - 6 \quad ? \quad 2n^2 + n - 1$ Comparando los dos miembros de la desigualdad (que seguimos sin conocer) observamos que: $2n^2 = 2n^2$, no influye para una desigualdad, $n = n$, tampoco influye. Podemos aplicar la propiedad de monotonía y sumar en ambos miembros sus opuestos: $-2n^2 - n$ para cancelarlos.

Queda $-6 \quad ? \quad -1$ como $-6 < -1$ entonces el signo buscado es ' $<$ '

Hemos encontrado que $d_n < d_{n+1}$ y por lo tanto la sucesión es **monótona creciente**

Ejercicio propuesto 4: Determina si la sucesión cuyo término general es $a_n = \frac{n-3}{n+2}$, es creciente o decreciente. [Respuesta](#)

5. SUCESIONES ACOTADAS

La definición es parecida a la de funciones:

$$\{a_n\} \text{ es } \mathbf{acotada} \Leftrightarrow \exists k > 0 / \forall n: |a_n| \leq k$$

Las sucesiones a_n , b_n y c_n vistas en los ejemplos 5, 6 y 7, son monótonas pero no acotadas. Las dos primeras crecen más allá de cualquier número $k > 0$ por grande que se quiera elegir. La tercera, c_n , decrece de manera que su valor absoluto es siempre mayor que cualquier número $k > 0$ por muy grande que sea.

Sin embargo a_n y b_n tienen cotas inferiores: -3 y $-5/2$ respectivamente y c_n tiene cota superior 4.

Ejemplo 9: Analiza si la sucesión de término general $a_n = \frac{n-3}{n+2}$ es acotada o no.

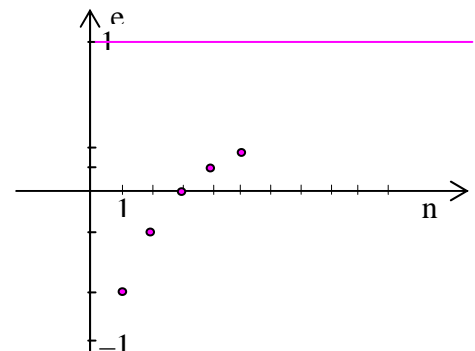
Mira la gráfica. Si observamos el comportamiento de los términos de la sucesión, cuando n crece indefinidamente, vemos que crecen, pero con una tendencia a estabilizarse.

Esta sucesión crece pero es acotada, con cota superior 1 pues $n-3 < n+2$ y por lo tanto el cociente es siempre menor que 1.

La cota inferior es igual en este caso al primer término: $-2/3$ porque la sucesión es monótona creciente.

Como la cota k es el valor positivo tal que $|a_n| \leq k$, decimos que

$$k = 1 \text{ pues } \forall n: \left| \frac{n-3}{n+2} \right| < 1$$



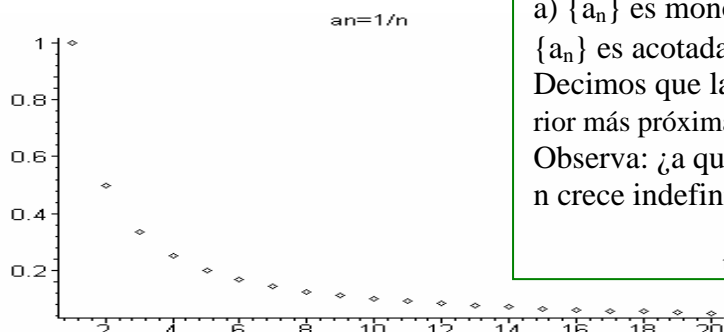
Ejemplo 10: Realiza el estudio completo de las sucesiones cuyos términos enésimos son:

a) $a_n = \frac{1}{n}$,

b) $b_n = 1 - \frac{1}{n}$

Los gráficos fueron realizados con Maple V y se han tomado distintas escalas para los ejes.

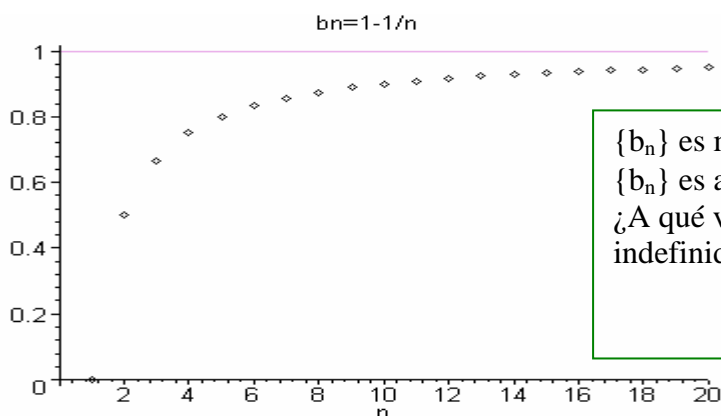
$\{a_n\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots\}$



a) $\{a_n\}$ es monótona decreciente
 $\{a_n\}$ es acotada pues $\exists k = 1 / |a_n| < 1$
 Decimos que la cota es $k = 1$ (aunque la cota inferior más próxima sea 0).
 Observa: ¿a qué valores se acercan los a_n cuando n crece indefinidamente?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots$$

$\{b_n\} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}, \dots\}$



$\{b_n\}$ es monótona creciente
 $\{b_n\}$ es acotada pues $\exists k = 1 / |a_n| < 1$
 ¿A qué valores se acercan los b_n cuando n crece indefinidamente?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots$$

6. LÍMITE DE SUCESIONES. SUCESIONES CONVERGENTES

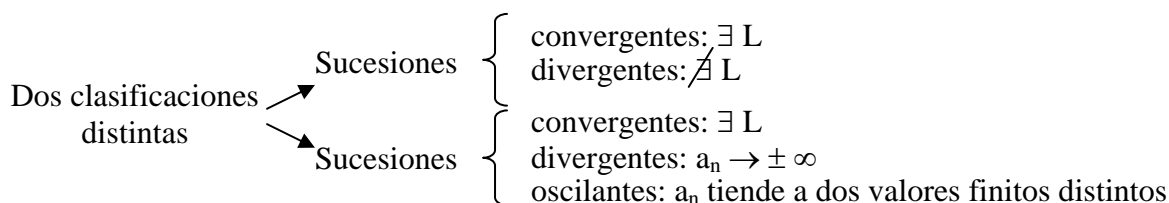
Las sucesiones que tienden a un valor L (tienen límite) se llaman **convergentes**.

$$\{a_n\} \text{ convergente} \Leftrightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

Recuerda que para que exista límite éste debe ser **único** y **finito**.

Si el límite no existe las sucesiones serán **no convergentes**.

Algunos autores clasifican las sucesiones en convergentes, divergentes y oscilantes y otros en convergentes y divergentes (todas las que no son convergentes entran en esta última)



A nosotros sólo nos interesa saber si la sucesión es convergente o no lo es.

Para calcular el límite de las sucesiones aplicaremos al término general a_n el mismo procedimiento que usamos en las funciones de variable real cuando x tiende a infinito.

Ej.: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3}{n+2} = 1$ Esta sucesión es **convergente**, o converge a 1 o tiende a 1.

En las sucesiones solamente interesa lo que sucede con los valores de a_n cuando n crece indefinidamente. Es decir, sólo se calcula límite para n tendiendo a infinito **¿Por qué?**

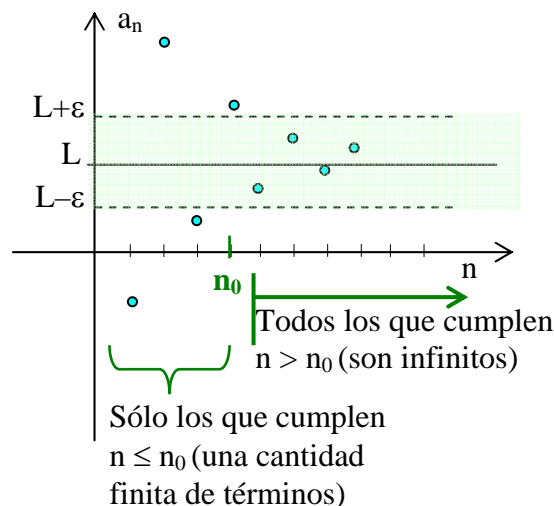
Definición formal e interpretación gráfica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) / \forall n > n_0: |a_n - L| < \varepsilon$$

Analicemos por partes:

Recuerda que, al igual que en la definición de límite de funciones, se fija primero un ε positivo y arbitrariamente pequeño alrededor de L , determinando el entorno de centro L y radio ε : $E(L, \varepsilon)$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, significa que los términos de la sucesión se acercan a L a medida que n crece. Esto está relacionado con la última parte de la definición: $|a_n - L| < \varepsilon$, que indica que las **distancias** de los términos de la sucesión a L , son menores que ε . (Las imágenes “caen” dentro de la franja determinada por $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$)



$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon)$ significa que para ese ε fijado, será posible encontrar un valor n_0 que depende de él. Si ε cambia, el valor n_0 también se modificará.

➤ Observa la gráfica: este n_0 es el último para el cual **no se cumple** la definición de límite, es decir que su imagen queda fuera de la franja o justo en el borde. Hay una cantidad finita de términos con $n \leq n_0$.

$\forall n > n_0: |a_n - L| < \varepsilon$ indica que para **todos** los términos que cumplen $n > n_0$ (son infinitos) se verifica la definición de límite, es decir que sus **distancias** a L , son menores que ε . La palabra **todos** es muy importante, pues si un solo término se llegara a “escapar” de la franja, no se cumpliría la definición de límite, como veremos en un caso más adelante.

Ejemplo 11: Calcula el límite de la sucesión $\{d_n\} = \left\{ \frac{2n-3}{n+1} \right\}$ y encuentra n_0 para $\varepsilon = 0,1$.

El límite lo calcularemos como en las funciones:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{n+1} = 2 \quad \text{la sucesión es convergente}$$

Aplicamos la definición de límite a nuestro ejercicio, con $\varepsilon = 0,1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{n+1} = 2 \Leftrightarrow \text{dado } \varepsilon = 0,1, \exists n_0(\varepsilon) / \forall n > n_0: \left| \frac{2n-3}{n+1} - 2 \right| < 0,1$$

De manera análoga a la determinación de δ en el límite de funciones, partimos de lo que se debería cumplir $\forall n > n_0$:

$$\left| \frac{2n-3}{n+1} - 2 \right| < 0,1 \Leftrightarrow \left| \frac{2n-3-2n-2}{n+1} \right| < 0,1 \Leftrightarrow \left| \frac{-5}{n+1} \right| < \frac{1}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{n+1} < \frac{1}{10} \quad (\text{porque } |-5| = 5 \text{ y } n+1 > 0 \text{ pues } n \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow n+1 > 50 \Rightarrow n > 49$$

Lo que hemos encontrado es que $\forall n > 49$ se verifica la definición de límite (las distancias de los términos de la sucesión a L , son menores que ε cuando $n > 49$). Por lo tanto el último término que no la cumple es el $n^\circ 49$ y ese es precisamente el valor de n_0 que buscamos.

Verificación: Tomemos $n_0 = 49$ (sabemos que no cumple)

Para $n_0 = 49$: $\left| \frac{2 \times 49 - 3}{49 + 1} - 2 \right| = \left| -\frac{1}{10} \right| = \frac{1}{10}$ no es menor que ε sino que es igual, entonces no cumple la definición de límite.

Tomemos ahora un valor de n que sí debe verificar, por ejemplo $n = 51$:

$$\left| \frac{2 \times 51 - 3}{51 + 1} - 2 \right| = \left| -\frac{5}{52} \right| = \frac{5}{52} = 0,096... < 0,1 \text{ sí verifica.}$$

7. PROPIEDADES Y ÁLGEBRA DE LOS LÍMITES

Si k es una constante, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (k a_n) = k A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} k = k$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = A - B$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{A}{B}$, $b_n \neq 0$, $B \neq 0$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^p = A^p$, $p \in \mathbb{R}$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[(a_n)^{b_n} \right] = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right]^{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = A^B$

Si $a_n \rightarrow \infty \wedge b_n \rightarrow \infty$, indeterminación $(\infty \cdot \infty)$


Si $a_n \rightarrow 0 \wedge b_n \rightarrow \infty$, indeterminación $(0 \cdot \infty)$

Si $a_n \rightarrow 0 \wedge b_n \rightarrow 0$, indeterminación $(0/0)$
Si $a_n \rightarrow \infty \wedge b_n \rightarrow \infty$, indeterminación (∞/∞)

Si $a_n \rightarrow 0 \wedge b_n \rightarrow 0$, indeterminación 0^0
Si $a_n \rightarrow \infty \wedge b_n \rightarrow 0$, indeterminación ∞^0
Si $a_n \rightarrow 1 \wedge b_n \rightarrow \infty$, indeterminación 1^∞


Teorema 1:

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ y $f(n) = a_n$ cuando n es natural, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$

 **Ejemplo 12:** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}$ es indeterminado de la forma $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$

Para calcularlo podemos utilizar $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ y aplicar Regla de L'Hospital al límite indeterminado.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$



Teorema 2: Teorema del emparedado.

Tiene el mismo significado que para funciones de variable real. En símbolos:

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L \wedge a_n \leq c_n \leq b_n \forall n \right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$$

 **Ejercicio propuesto 5:** Analiza la convergencia de las siguientes sucesiones:

a) $\left\{ \frac{2}{n} \right\}$, b) $\left\{ (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n} \right\}$ c) $\{-4\}$ d) $\{e_n\} = \left\{ \frac{n^2 + 3}{n} \right\}$

[Respuesta](#)

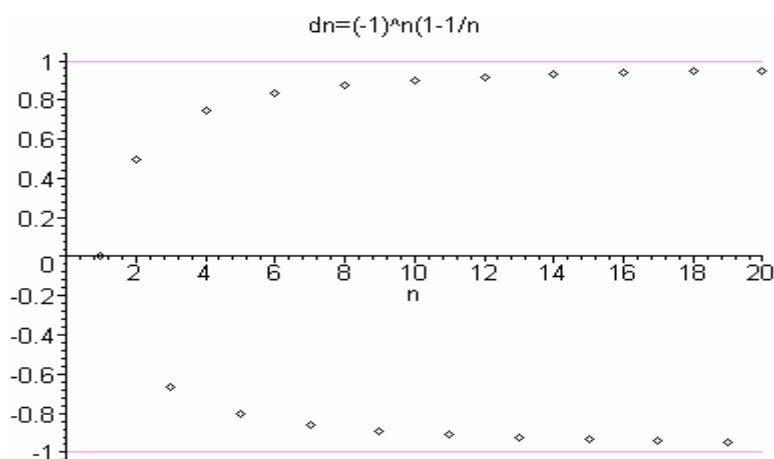
Ejemplo 13: Analiza la convergencia de la sucesión cuyo término general es $(-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

$$\text{¿} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right] ?$$

Cuando $n \rightarrow \infty$, $(1/n) \rightarrow 0$ y los términos de la sucesión se acercan a $(-1)^n$

Es decir que si n es par, los términos tienden a $+1$ pero si n es impar, tienden a -1 .

La siguiente gráfica ha sido realizada con Maple V, servirá para aclarar la situación.



Si quisiéramos considerar que el límite es 1, nos encontraríamos con el siguiente problema:

Fijado ε alrededor de 1, podemos determinar un n_0 que depende de él y se verifica $|a_n - 1| < \varepsilon$ para infinitos términos con $n > n_0$.

Pero no se cumple para **todos** los que le siguen, sólo para los de n par, pues los impares se “escapan” de esa franja y quedan dentro de otra franja alrededor de -1 .

Los términos se acercan por un lado a 1 y por otro a -1 , no tienden a un único valor. Recuerda que una propiedad del límite es su unicidad.

Entonces no existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[(-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right]$ y por lo tanto la sucesión **no es convergente**. Algunos autores dirán que es divergente y otros que es oscilante.

8 CONVERGENCIA DE LAS SUCESIONES MONÓTONAS ACOTADAS

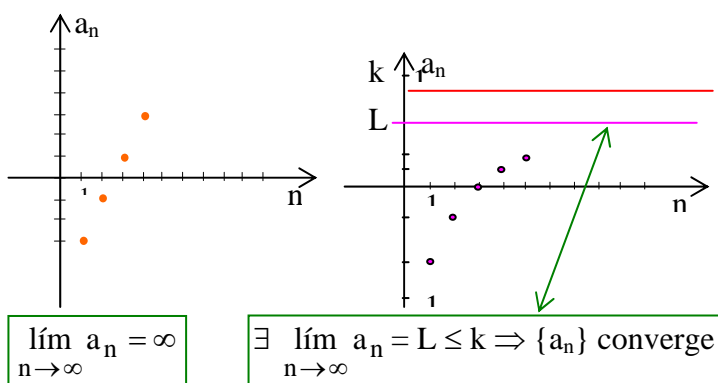
Teorema 3: Si una sucesión es **monótona** y **acotada**, entonces es **convergente**.

Analicemos por partes:

Si una sucesión es **monótona**, quiere decir que es **creciente** o (en sentido excluyente) **decreciente**.

1º) Si es **creciente** puede serlo de dos maneras distintas: que tienda a infinito o que tenga una cota superior. En este último caso tendrá límite que podrá ser menor o igual que dicha cota superior.

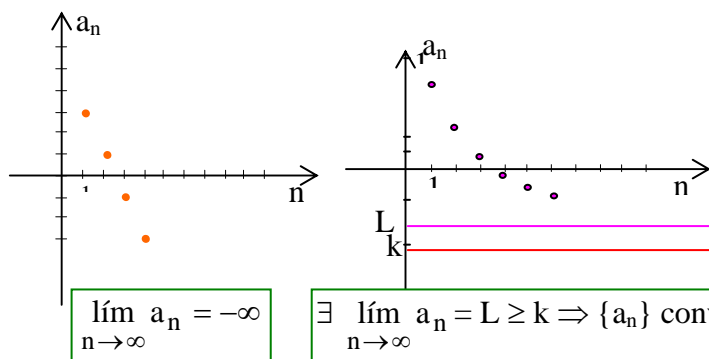
Gráficamente puede tomar alguna de las formas de la figura de la derecha:



$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \leq k \Rightarrow \{a_n\} \text{ converge}$$

Si una sucesión **monótona creciente** tiene cota superior, es convergente.



2º) De manera análoga ocurre si la sucesión es monótona decreciente. Puede ser decreciente sin cota inferior o con cota inferior. En este último caso existe límite que será mayor o igual que la cota inferior.

Si una sucesión **monótona decreciente** tiene cota inferior, es **convergente**.

Las dos partes se pueden unir en el único teorema del comienzo:

Si una sucesión es **monótona y acotada**, entonces es **convergente**.

Ejercicio propuesto 6: Analiza el valor de verdad de las siguientes proposiciones en términos de implicaciones. (Recuerda que para afirmar que una proposición es falsa, basta con un contraejemplo)

- | |
|--|
| |
| |
| |
| |
- a) Si una sucesión es monótona, entonces es convergente.
 - b) Si una sucesión es acotada, entonces es convergente.
 - c) Si una sucesión es convergente, entonces es acotada.
 - d) Si una sucesión es convergente, entonces es monótona.

[Respuesta](#)

9 EL NÚMERO “e”

Estudiemos la sucesión $\{a_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\} = \{2; 2,25; 2,37...; 2,44...; 2,48832;...; \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n;...\}$

Para $n=1$: $a_1 = (1 + 1)^1 = 2$

$$n=2: a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$n=3: a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 1 + 3 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3}$$

1º) ¿Es monótona? Desarrollando a_n veremos que $a_n < a_{n+1}$:

Para $n = n$: Apliquemos la fórmula del binomio de Newton:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

En nuestro a_n “ $a = 1$ ” y solamente quedan las potencias de $b = \frac{1}{n}$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)\dots[n-(n-1)]}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}$$

En cada término simplificamos n y dividimos cada paréntesis por una n de las que quedan en el denominador; luego aplicamos propiedad distributiva de la división respecto a la suma algebraica.

Por ejemplo en el 4º término: $\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{1}{3!} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{n \cdot n} = \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)$

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \quad \textcircled{1}$$

Cuando n aumenta, se agrega un nuevo sumando que es positivo pues todos los paréntesis lo son.

Esto demuestra que la sucesión es **monótona creciente**.

2º) ¿Es acotada?

Para responder esta pregunta debemos encontrar un n° positivo tal que a_n sea menor que ese n° para todo n .

El término general a_n desarrollado en ①, tiene todos los paréntesis menores que 1, ya que se trata de diferencias de la forma 1 menos una fracción menor que 1.

Por lo tanto podemos decir que a_n es menor que la siguiente expresión:

$$b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \rightarrow \boxed{a_n < b_n}$$

A su vez b_n es menor que la expresión que sigue:

$$c_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{pues } 2^2 < 3!; \quad 2^3 < 4!; \quad 2^{n-1} < n! \quad \forall n > 2 \rightarrow \boxed{a_n < b_n < c_n}$$

$$\text{Por otra parte } \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1}{2^{n-1}} < 1$$

$$\text{Por ejemplo para } \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^5} = \frac{2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1}{2^5} = \frac{31}{32} < 1$$

De aquí concluimos que $c_n < 3$, ya que es igual a $1 + 1$ más un n° menor que 1.

Es decir: $\boxed{a_n < b_n < c_n < 3}$

Hemos demostrado que $\{a_n\}$ tiene cota superior. Por el teorema 3, si es monótona creciente y tiene cota superior, entonces es convergente y existe límite de su término enésimo:

$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ y si existe le podemos dar un nombre, lo llamamos e .

$$\boxed{e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281\dots}$$

10. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

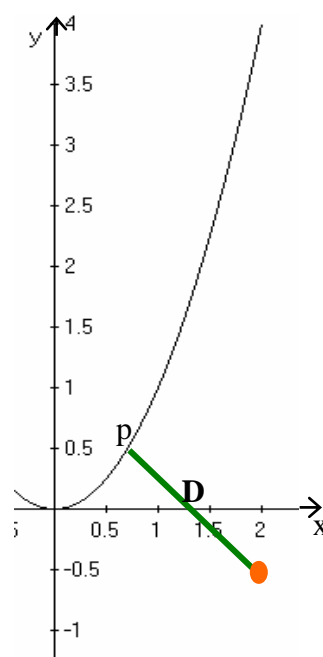
Al resolver algunos problemas de ingeniería se presentan ecuaciones como $x^3 + x - 1 = 0$, $\sin x - x^2 = 0$, entre otras, que no tienen una fórmula para resolverla y hay que buscar otros caminos. Surgen así métodos aproximados, uno de los cuales es el método iterativo de Picard que aproxima la solución de una ecuación mediante una **sucesión** que se “acercas” o “tiende” a dicha solución. Esta situación se presenta, por ejemplo, en el siguiente problema.

Problema de la sonoboya¹:

Sea un submarino que viaja siguiendo una trayectoria parabólica $y = x^2$ y una **sonoboya** (detector de sonido en el agua) situada en el punto $(2, -\frac{1}{2})$. Se necesita encontrar el punto de máximo acercamiento (PMA) entre el submarino y la sonoboya, como muestra la figura.

En realidad el problema consiste en encontrar las coordenadas del punto p de la parábola que minimiza la distancia **D**

Ese punto tiene coordenadas $(x, y) = (x, x^2)$ y la distancia **D** entre



¹ Extraído de Thomas / Finney. Cálculo con Geometría Analítica. Sexta edición. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana

$p(x, x^2)$ y $(2, -\frac{1}{2})$ es entonces función de x :

$$D(x) = \sqrt{((x-2)^2 + (x^2 + \frac{1}{2})^2)} = \sqrt{x^4 + 2x^2 - 4x + 17/4}$$

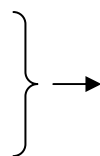
Para encontrar los valores de x que hacen mínima la distancia, derivamos con respecto a x e igualamos a 0 (como aprendiste en la unidad de máximos y mínimos).

$$\frac{4x^3 + 4x - 4}{2\sqrt{x^4 + 2x^2 - 4x + 17/4}} \quad D'(x) = 0 \Rightarrow 4(x^3 + x - 1) = 0 \Rightarrow x^3 + x - 1 = 0$$

Por el teorema del valor intermedio para funciones continuas (lo vimos en la unidad 2), podemos asegurar que hay por lo menos un valor de x entre 0 y 1 que verifica esta ecuación, pues:

Llamando $h(x) = x^3 + x - 1$

- $h(x)$ es continua en $[0; 1]$
- $h(0) = -1$
- $h(1) = 1$



$h(x)$ cambia de signo en los extremos del intervalo, entonces el teorema del valor intermedio aplicado a $h(x)$ garantiza que
 $\exists x \in (0; 1) / h(x) = 0$

Ya sabemos que **existe** por lo menos una solución de la ecuación, pero... **¿cómo la encontramos?**

Alguien podría responder: “– con una calculadora”. Es una respuesta válida, pero... ¿cómo hace la calculadora?

Aquí vienen en auxilio los métodos iterativos como el de Picard, que trabaja con una **sucesión** de números que se acerca cada vez más al valor de la solución.

Método de Picard: Encontrar las raíces de la ecuación $f(x) = 0$, es equivalente a encontrar la solución de $f(x) + x = x$.

A esta nueva función la llamamos $g(x)$

Para que el método sea aplicable, se necesita que $g(x)$ cumpla con una restricción:

Si la raíz pertenece al intervalo (a, b) , debe ser $|g'(x)| < 1 \forall x \in (a, b)$

En nuestro caso no podemos hacer directamente $g(x) = 1 - x^3 = x$ pues:

Para $x \in (0; 1)$, $g'(x) = 3x^2 \in (0; 3)$ y no cumple la restricción $|g'(x)| < 1$.

Decir $x^3 + x - 1 = 0$, equivale a $x(x^2 + 1) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + 1} = x$, con $g(x) = x = \frac{1}{x^2 + 1}$

El método consiste en dar a x un valor inicial x_0 en el dominio de $g(x)$, y aplicarle sucesivamente la función g :

$$x_1 = g(x_0), \quad x_2 = g(x_1), \quad x_3 = g(x_2), \dots$$

En nuestro caso hacemos $x_0 = 1$

Se obtiene así una sucesión de valores de x que se acercan (convergen) hacia el valor buscado.

Aplicamos el método comenzando con $x_0 = 1$

| x | $g(x)$ |
|--------------------|--------------------|
| $x_0 = 1$ | $x_1 = 0,5$ |
| $x_1 = 0,5$ | $x_2 = 0,8$ |
| $x_2 = 0,8$ | $x_3 = 0,6097909$ |
| $x_3 = 0,6097909$ | $x_4 = 0,72896709$ |
| $x_4 = 0,72896709$ | $x_5 = 0,72896709$ |

Los dos últimos valores de x son iguales hasta la 8ª cifra decimal, por lo que podemos considerar resuelto lo que se pedía.

Respuestas

Ej. propuesto 1 (Página 2) $a_1 = 1$; $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$

$a_2 = 1+1 = 2$; $a_3 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$; $a_4 = \frac{5}{2} + \frac{1}{3} = \frac{17}{6}$; $a_5 = \frac{17}{6} + \frac{1}{4} = \frac{37}{12}$;
 $\{a_n\} = \{2, \frac{5}{2}, \frac{17}{6}, \frac{37}{12}, \dots\}$

[Volver](#)

Ej. propuesto 2 (Página 4): $d_n = \frac{2n+1}{3n-2}$

[Volver](#)

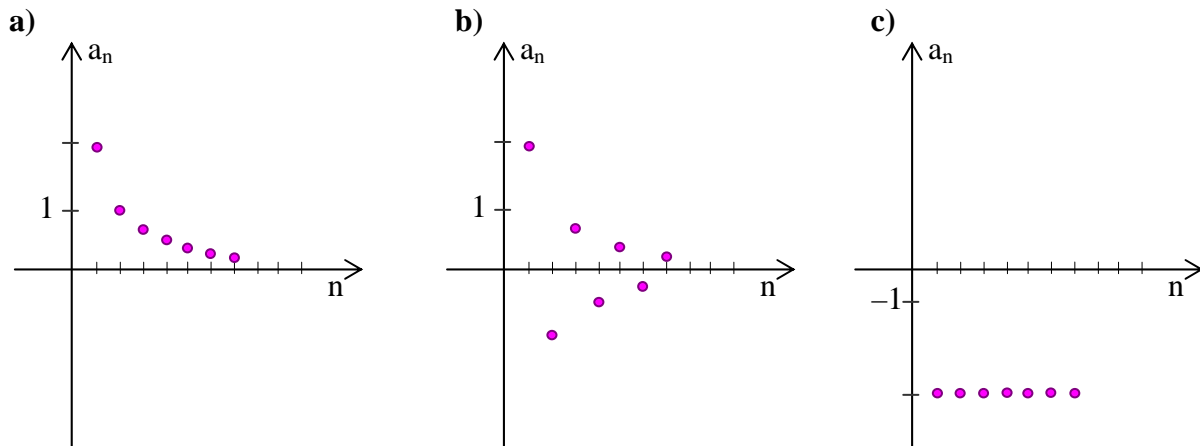
Ej. propuesto 3 (Página 4)

a) $\left\{\frac{2}{n}\right\} = \{2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \dots\}$

b) $\left\{(-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n}\right\} = \{2, -1, \frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \dots\}$

c) $\{-4\} = \{-4, -4, -4, -4, \dots\}$

[Volver](#)



Ej. propuesto 4 (Página 5)

$$a_n = \frac{n-3}{n+2} \quad ? \quad a_{n+1} = \frac{n+1-3}{n+1+2} = \frac{n-2}{n+3}$$

$$\frac{(n-3) \cdot (n+3)}{n^2 - 9} \quad ? \quad \frac{(n-2) \cdot (n+2)}{n^2 - 4}$$

$$\frac{-9}{-9} < \frac{-4}{-4} \Rightarrow a_n < a_{n+1} \Rightarrow \text{la sucesión es monótona creciente}$$

[Volver](#)

En las sucesiones no se puede calcular el límite para n tendiendo a algún valor finito 'a', porque aunque podemos elegir un ε arbitrariamente pequeño alrededor de 'L', no podemos encontrar un entorno reducido de centro 'a' y radio ' δ ', ya que n es natural.

[Volver](#)

Ej. propuesto 5 (página 8)

a), b) y c) son convergentes; d) divergente

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{n} + \frac{3}{n}}{\frac{n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \frac{3}{n}}{1} = \infty \text{ la sucesión es divergente}$$

[Volver](#)

Ej. propuesto 6 (página 10): V o F

a) F, b) F, c) V, d) F

[Volver](#)

Bibliografía

- Purcell / Varberg / Rigdon (2001). Cálculo. Editorial Prentice – Hall. 8ª edición.
Rabuffetti Hebe. (1986). Introducción al Análisis Matemático. Editorial Ell Ateneo, 10ª edición
Sadosky / Guber. (2004) Elementos de Cálculo Diferencial e Integral. Editorial Alsina, 3ª edición.
Spivak Michael. (1999). Cálculus. Editorial Reverté 2ª edición
Stewart James. (2006). Cálculo Diferencial e Integral. Editorial Thomson 2ª edición
Thomas / Finney. Cálculo (una variable). Editorial Addison –Wesley-Longman